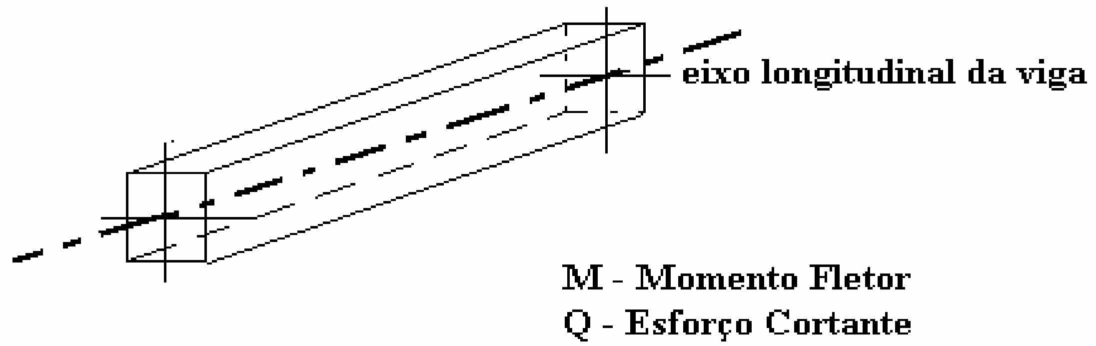
CAPÍTULO I V

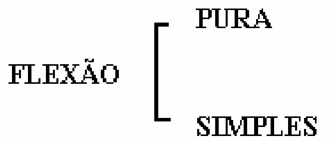
FLEXÃO PURA

I INTRODUÇÂO

Seja um elemento linear que apresenta a característica de possuir uma das dimensões (comprimento) muito maior do que as outras duas (dimensões da seção transversal). A linha que une o centro de gravidade de todas as seções transversais constitui-se no eixo longitudinal da peça, e o mesmo está submetido a cargas perpendiculares ao seu eixo. Este elemento desenvolve em suas seções transversais solicitações de Momento Fletor (M) e Esforço Cortante (Q) , sendo o Fletor responsável pela flexão e o Esforço Cortante responsável pelo cisalhamento da viga.



O estudo da flexão é dividido da seguinte maneira:



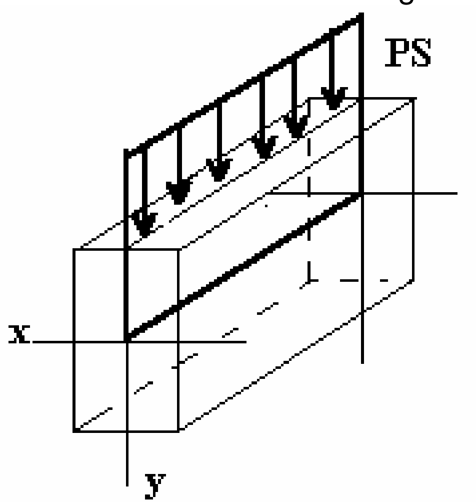
FLEXÃO PURA - Desprezado o efeito do Esforço Cortante
FLEXÃO SIMPLES - Momento Fletor e Esforço Cortante considerados.

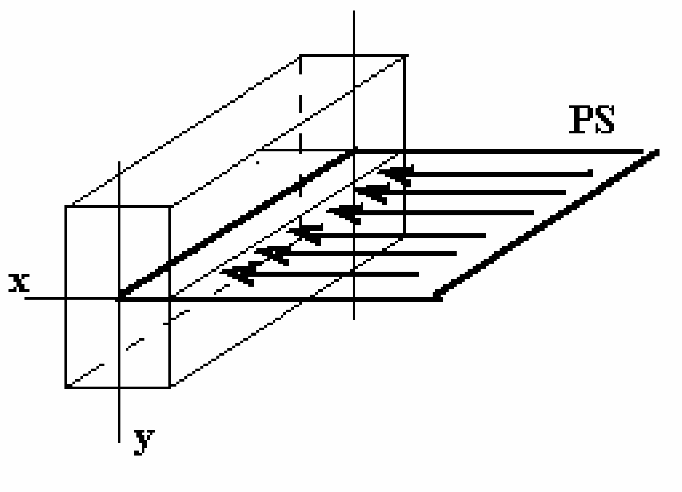
Convencionando por x e y os eixos principais centrais de inércia da seção transversal da viga (temos condições de determinar estes eixos e também os momentos de inércia que à eles correspondem).

Vamos chamar de Plano de Solicitações (PS) ao plano onde se desenvolvem as solicitações, que corresponde ao plano do carregamento.

A posição deste plano pode ser a mais diversa possível, e devemos comparar esta posição com a posição dos eixos principais centrais de inércia da seção transversal.

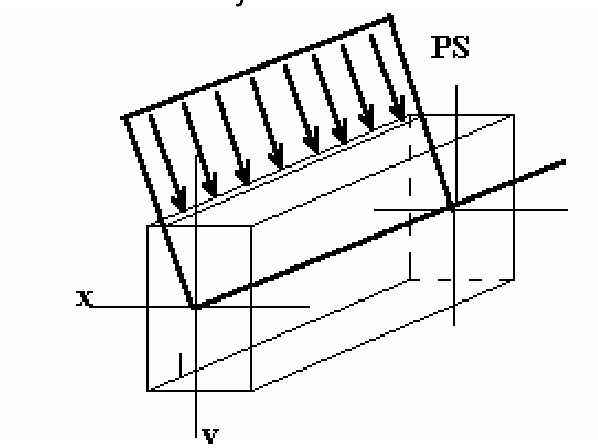
Podemos obter as seguintes situações:





PS contém eixo y

PS contém eixo x



PS não contém nenhum eixo principal central de inércia da seção

De acordo com estas observações podemos classificar a flexão em:

RETA - Ocorre quando o Plano de Solicitações contém um dos eixos principais centrais de inércia da seção (x ou y), que está representada nos dois primeiros exemplos.

OBLÍQUA - Ocorre quando o Plano de Solicitações é desviado em relação aos eixos principais centrais de inércia da seção, representada no terceiro exemplo.

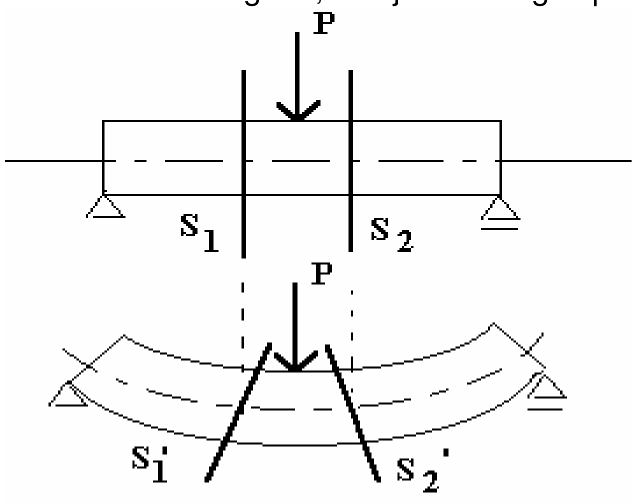
A classificação definitiva para a flexão ficaria:

- FLEXÃO
  - PURA
    - RETA
    - OBLÍQUA
  - SIMPLES
    - RETA
    - OBLÍQUA

II. FLEXÃO PURA RETA

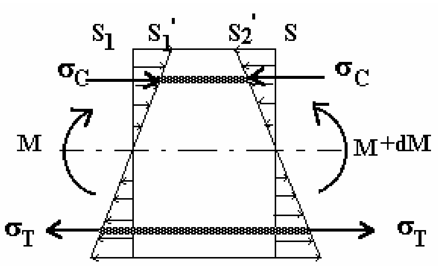
É o caso mais simples e o mais comum de flexão. Podemos ainda dizer que na flexão o natural é o Plano de Solicitações vertical pois é o plano que contém as cargas peso.

Vamos iniciar o nosso estudo por um caso simples de uma peça de seção transversal retangular, e sujeita a cargas peso, conf. abaixo:



x,y - eixos principais centrais de inércia da seção retangular
z - eixo longitudinal da peça.

Isolando o trecho compreendido entre as seções S_1 e S_2 podemos com a observação tirar diversas conclusões que nos levam a conhecer o funcionamento de uma peça sujeita à flexão.



Conclusões:

1. No exemplo citado as fibras de baixo se alongaram, e isso nos diz que deve haver uma tensão normal de tração capaz de provocar este alongamento.

2. As fibras de cima se encurtaram e o fizeram porque houve uma tensão normal de compressão que as encurtou.

3. Existe uma linha na **seção transversal** na altura do eixo longitudinal constituída por fibras que não alongaram e nem encurtaram, nos fazendo concluir que nesta linha não existe tensão normal. Chamamos esta linha de **LINHA NEUTRA (LN)** e neste exemplo ela coincide com o eixo x , que é principal central de inércia da seção transversal retangular.

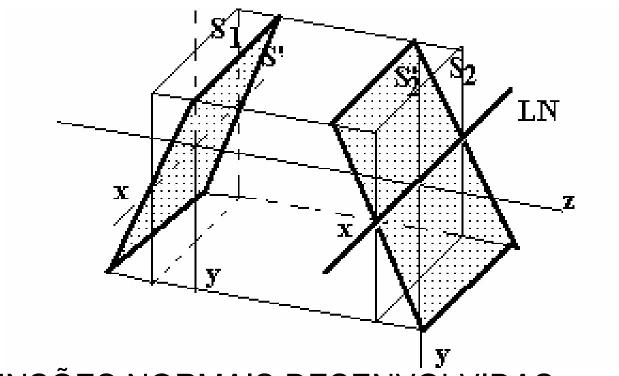
Numa flexão reta a LN é sempre um dos eixos principais centrais de inércia da seção:

PS contendo eixo y → LN coincide com o eixo x
PS contendo eixo x → LN coincide com o eixo y

Numa flexão reta LN e PS são sempre perpendiculares entre si.

OBS: A Linha Neutra (LN) representa fisicamente o eixo em torno do qual a seção gira.

4. Quanto mais afastada for a fibra da LN maior será a sua deformação e conseqüentemente maior será a tensão que lhe corresponde (lei de Hooke).



A. TENSÕES NORMAIS DESENVOLVIDAS

Vamos adotar para a formação da expressão que nos permite calcular as tensões normais desenvolvidas em uma seção transversal, o seguinte exemplo:

- Viga de seção retangular (bxh) , onde os eixos principais centrais de inércia são os eixos
  de simetria (x,y).
- Plano de Solicitações verticais (cargas peso).

notações e convenções:

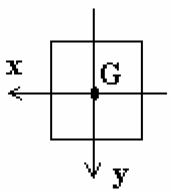
σ - Tensões Normais : (+) tração (-) compressão

J_X - Momento de inércia da seção em relação ao eixo x, principal central de inércia (pci).

M_X - Momento Fletor atuante na seção transversal devido à ação das cargas
(+) traciona as fibras da parte de baixo da seção transversal
(-) traciona as fibras de cima

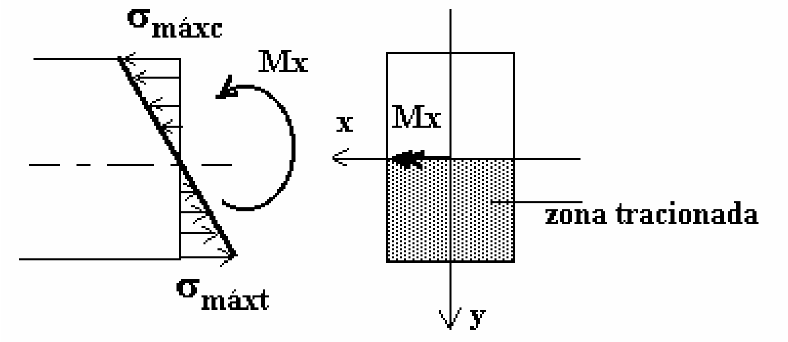
Eixos Principais Centrais de Inércia:

O sentido convencionado para estes eixos será contrário ao dos eixos coordenados:



y - ordenada genérica da fibra considerada, ou seja, da fibra para a

qual se quer calcular as tensões normais.
sinal: (+) ou (-) , de acordo com a orientação convencionada para o eixo y.



Conhecido o funcionamento da peça e as grandezas que influem em seu funcionamento à flexão podemos simplesmente montar uma equação que nos permita calcular a tensão normal desenvolvida nos diversos pontos que constituem a seção em estudo:

$$\boxed{\sigma_y = \frac{M_x}{J_x} . y}$$

Observando esta expressão, podemos notar que a tensão desenvolvida depende diretamente do momento fletor que atua na seção (responsável pela tendência de giro), e é inversamente proporcional ao momento de inércia da seção, o que se explica, pois o momento de inércia representa fisicamente resistência ao giro.

A tensão também é diretamente proporcional a ordenada y, que representa a distância da fibra em que se deseja calcular a tensão até a linha neutra, ficando de acordo com a lei de Hooke (proporcionalidade entre tensão e deformação), pois as deformações crescem com a distancia à Linha Neutra .

OBS:

1. Esta expressão nos permite calcular a tensão normal desenvolvida devido ao momento fletor em qualquer ponto de qualquer seção da viga considerada.

2. Se tivéssemos exemplificado com o Plano de Solicitações horizontal, as seções girariam em tôrno do eixo y e a expressão ficaria:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} . x}$$

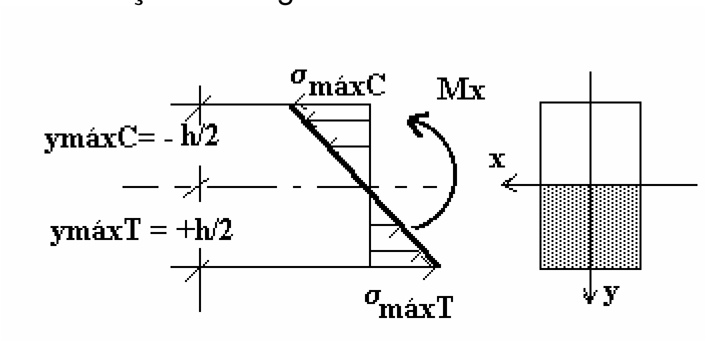
B. TENSÕES NORMAIS EXTREMAS (MÁX. E MÍN)

As máximas tensões de tração e de compressão ocorrem nos pontos mais afastados da Linha Neutra, porque são nestes pontos que a deformações são máximas(lei de Hooke).

Para facilitarmos o cálculo das tensões normais máximas, vamos dividir a nossa peça em duas categorias:

1. <u>Peças Simétricas em relação ao eixo x:</u>

Ex: Seção Retangular



Observe que em peças simétricas a distancia da fibra mais tracionada e da fibra mais comprimida até a Linha Neutra é igual à metade da altura total da peça (h/2)

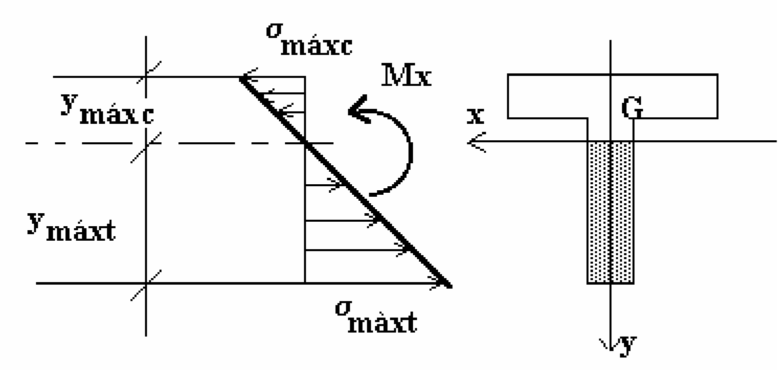
$$\sigma_{máxT} = \frac{Mx}{Jx} \cdot y_{máxT} \qquad \sigma_{máxC} = \frac{Mx}{Jx} \cdot y_{máxC}$$

$y_{máxT} = |y_{máxC}| = h/2$ então:

$$\sigma_{máxT} = |\sigma_{máxC}|$$

<u>2. Seções não simétricas em relação ao eixo x:</u>

Ex: Seção "T"



Nestes casos

$|y_{máxc}| \neq y_{máxt}$

então:

$$\sigma_{máxT} \neq |\sigma_{máxC}|$$

OBS: Nas seções não simétricas as convenções devem ser observadas com cuidado pois a simples inversão de qualquer sentido ou sinal torna os resultados diferentes dos observados na prática.

C. MÓDULO DE RESISTÊNCIA À FLEXÃO (W)

Por definição, módulo de resistência à flexão é a relação entre o momento de inércia da seção em relação à um eixo e a distância do ponto mais afastado da seção àquele eixo.

Como estamos exemplificando o caso de cargas verticais em que o eixo de rotação (LN) é x, teríamos:

$$\boxed{W_x = \frac{J_x}{y_{máx}}}$$

Podemos substituir este conceito na expressão que nos dá a tensão máxima e teríamos:

$$\sigma_{máx} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{máx} \qquad \text{ou}$$

$$\boxed{\sigma_{máx} = \frac{M_x}{W_x}}$$

Note-se que não se faz distinção entre $y_{máxt}$ e $y_{máxc}$, portanto a utilização prática desta constante se dá no cálculo da tensão máxima em peças simétricas, onde eles são iguais.

Muitas vezes, em peças comerciais , o valor do módulo de resistência à flexão é tabelado.

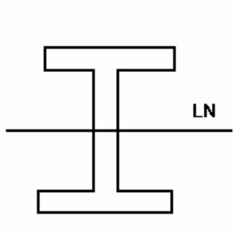
Se estivéssemos tratando do caso de Momento Fletor em torno do eixo y (rotação em torno de y), a expressão ficaria:

$$\boxed{W_y = \frac{J_y}{x_{máx}}} \qquad\qquad \boxed{\sigma_{máx} = \frac{M_y}{W_y}}$$

D. SEÇÕES E POSIÇÕES MAIS CONVENIENTES

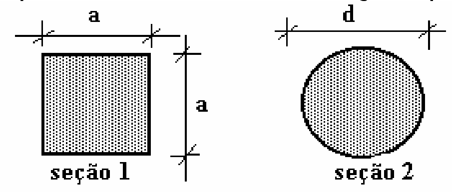
A melhor forma para a seção transversal de uma viga sujeita à flexão é aquela que tem grande parte de sua área em regiões o mais afastadas possíveis de sua LN.

Ex:

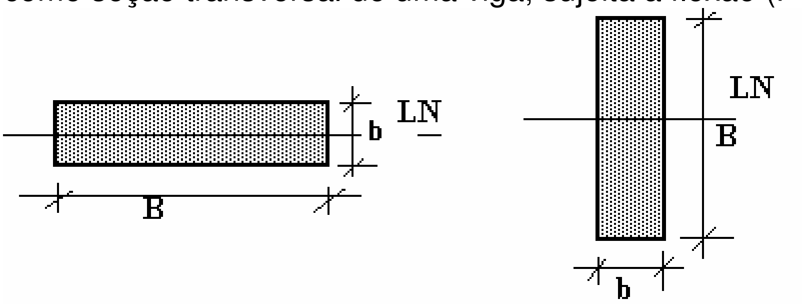


Para uma mesma seção, ou seja, para um mesmo material empregado, nós podemos aproveita-lo da melhor forma possível, ou na melhor posição possível, fazendo uma simples análise do seu módulo de resistência à flexão.

Ex 1: Qual a forma mais conveniente para ser utilizada em uma viga sujeita à flexão, optando-se entre uma seção quadrada e outra circular, ambas de mesma área?



Ex 2: Qual a posição mais conveniente de uma seção retangular b x B , para servir como seção transversal de uma viga, sujeita à flexão (PS vertical)

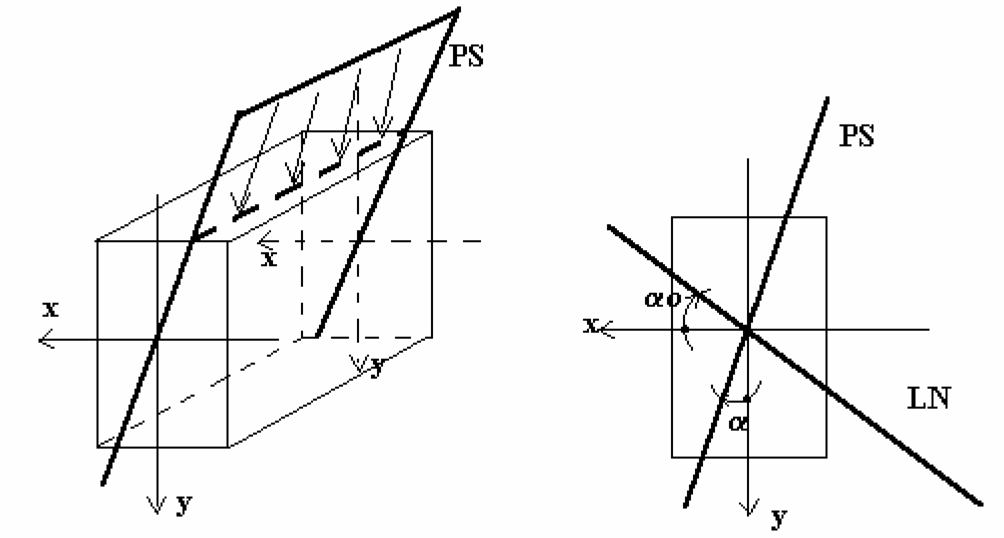


III. FLEXÃO PURA OBLÍQUA

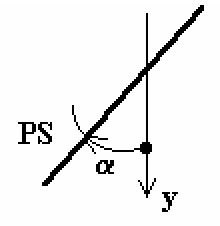
A. CONCEITO

Uma flexão é classificada como pura quando o efeito do esforço cortante (Q) é desprezado e é oblíqua quando o Plano de Solicitações (PS) não contém nenhum eixo principal central de inércia da seção(epci).

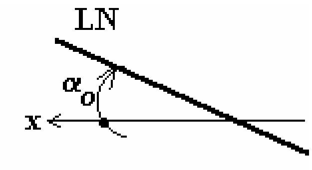
Ex:



Numa flexão oblíqua existem algumas grandezas que devem ser consideradas



α - ângulo que o PS faz com o eixo y, considerado positivo quando o PS se desloca de y no sentido horário



α_o - ângulo que a Linha Neutra faz com o eixo x, considerado positivo quando se desloca de x no sentido horário

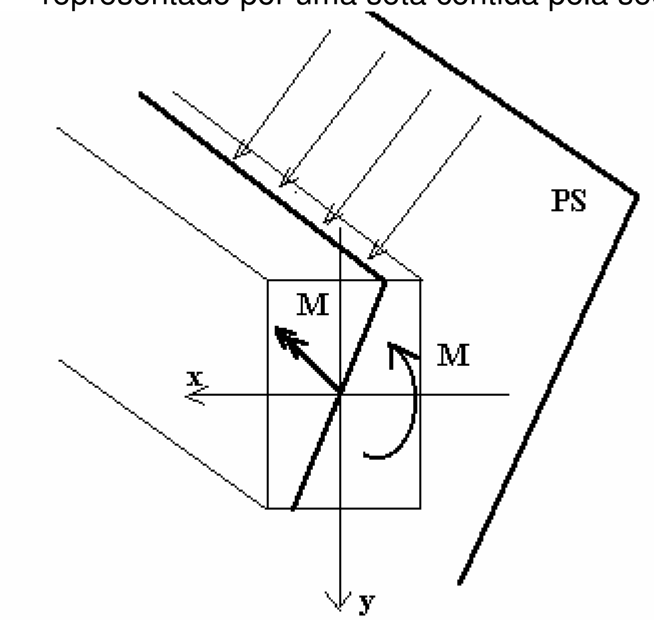
Vimos na flexão reta que a LN era o eixo em torno do qual a seção girava. Na flexão oblíqua ela representa fisicamente a mesma coisa, porém nem o PS e nem a LN são epci.

Numa flexão Oblíqua LN e PS não precisam ser perpendiculares, e somente o serão quando α for igual à α_o.

Normalmente α é uma grandeza conhecida e α_o é uma grandeza que deve ser calculada, o que veremos posteriormente.

B. TENSÕES NORMAIS DESENVOLVIDAS

Sabemos que o momento fletor é um vetor e que como tal pode ser representado por uma seta contida pela seção transversal (regra da mão direita).



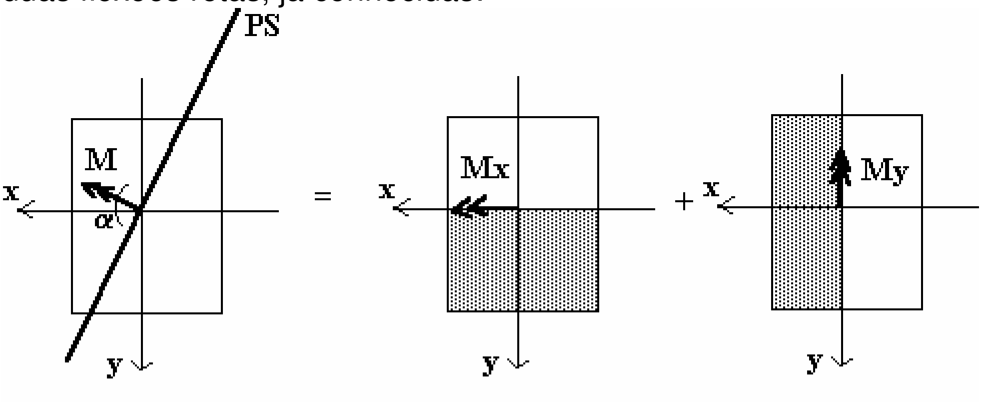
Como qualquer vetor em um plano pode ser decomposto segundo duas direções que nos interesse, podemos decompor o vetor M segundo as direções x e y, obtendo, trigonométricamente:

$M_x = M \cdot \cos\alpha$

$M_y = M \cdot \text{sen}\alpha$

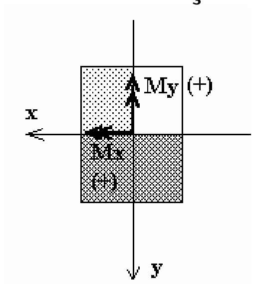
$\frac{M_y}{M_x} = \text{tg}\ \alpha$

Podemos então fazer com que a flexão oblíqua recaia no caso da soma de duas flexões retas, já conhecidas:



$$\sigma_y = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \qquad \sigma_x = \frac{M_y}{J_y} \cdot x$$

CONVENÇÕES:



Mx - positivo quando traciona as fibras de baixo

My - positivo quando traciona as fibras da esquerda

OBS: A Convenção adotada para o momento fletor não tem nada à ver com a convenção adotada para os eixos principais centrais de inércia da seção.

Adotando-se o princípio da Superposição de efeitos podemos então calcular a tensão da resultante M somando-se algébricamente os efeitos de Mx e My.

$$\boxed{\sigma_{x,y} = \frac{Mx}{Jx} \cdot y + \frac{My}{Jy} \cdot x}$$

Equação Geral das Tensões

Esta equação nos permite calcular a tensão no ponto que quisermos da seção em estudo, bastando para isto substituirmos os valores de x e y pelas coordenadas do ponto (não esquecer que estas coordenadas devem ter um sinal, de acordo com a orientação convencionada para os epci).

C. ESTUDO DA LINHA NEUTRA

Normalmente o nosso objetivo ao projetar ou verificar uma peça está nas tensões máximas.

As tensões máximas devem estar nos pontos mais afastados do eixo em torno do qual a seção gira (LN) e portanto para conhecermos estes pontos precisamos estudar a LN.

Por definição a LN é a linha de tensões nulas e portanto podemos descreve-la sob a forma de uma equação, igualando a equação das tensões à zero. Então:

$\sigma_{x,y} = 0$ ou $\frac{Mx}{Jx}.y + \frac{My}{Jy}.x = 0$

mudando a maneira de escrever esta equação ficamos:

$$y = -\operatorname{tg}\alpha.\frac{Jx}{Jy}\,x$$

Podemos concluir por esta equação que:

- A LN é uma reta
- A LN passa pelo centro de gravidade da seção(G) que é o ponto de coordenadas (0;0)
- A LN não é perpendicular ao PS

Conhecidas algumas particularidades da LN podemos definir a sua posição determinando o ângulo α_o .

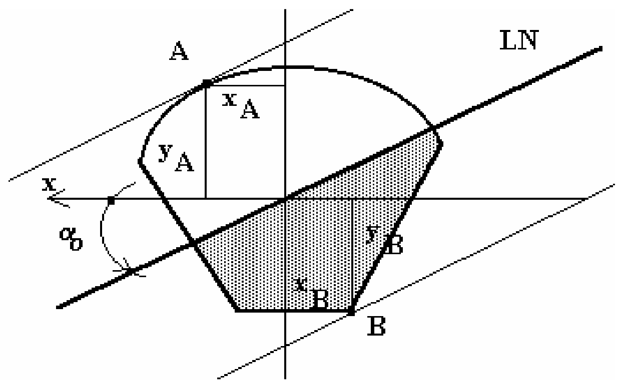
$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_o = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{J_x}{J_y}}$$ **POSIÇÃO DA LN**

OBS: A LN é perpendicular ao PS quando $\alpha = \alpha_o$, ou seja quando $\frac{Jx}{Jy} = 1$.

Isto acontece nos casos particulares de seção onde Jx = Jy
Ex: seção quadrada, circular e coroa circular.
D. TENSÕES MÁXIMAS

Ocorrem nos pontos mais afastados da LN. Então determinada a LN podemos determinar a posição destes pontos e calcular nestes pontos as tensões máximas.

1. SEÇÕES QUAISQUER(método gráfico)



1. Determinamos a posição da LN (α_o)
2. Desenhamos a seção em escala e posicionamos a LN
3. Traçamos paralelas à LN e tangentes à seção e determinamos os pontos A e B(pontos mais afastados da LN)

4. Determinamos as coordenadas destes pontos com a escala adotada no traçado da seção.

5. Calculamos as tensões nestes pontos, que deverão ser as máximas.

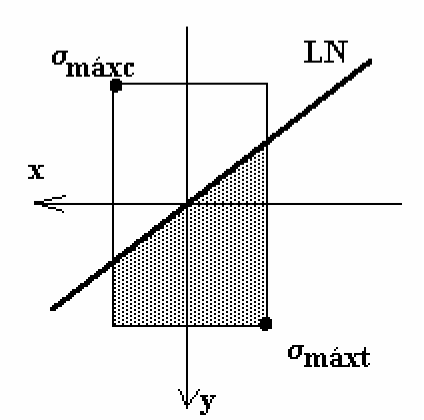
OBS: No desenho acima foi arbitrado ser o ponto B tracionado e o ponto A comprimido, devendo isto ser determinado pelo cálculo. O importante é que, se em um destes pontos, o resultado para a tensão for positivo ($\sigma_{máxt}$) no outro obrigatoriamente a tensão será negativa($\sigma_{máxc}$) pois a linha neutra divide a zona tracionada da zona comprimida.

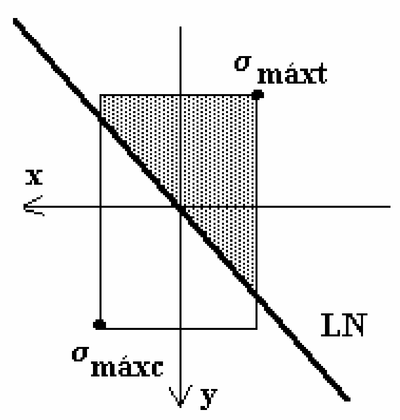
$$\sigma_A = \frac{M_x}{J_x}(y_A) + \frac{M_y}{J_y}(x_A) \qquad \sigma_B = \frac{M_x}{J_x}(y_B) + \frac{M_y}{J_y}(x_B)$$

2. SEÇÕES SIMÉTRICAS

Para o cálculo das tensões máximas nas peças com simetria em relação à x e em relação à y, qualquer método pode ser utilizado, pois em uma seção simétrica as tensões máximas ocorrem sempre nos vértices, e em dois vértices opostos são sempre de mesmo módulo e sinal contrário. Devemos lembrar portanto que:

$$\sigma_{máx\,t} = |\sigma_{máx\,c}|$$





EXERCÍCIO:

1. Uma viga de seção retangular 20 x 30 cm suporta um momento fletor positivo de 20 kN.m. A peça é construida com material que apresenta σ_T = 18 MPa e σ_C = 32 MPa. Determine o coeficiente de segurança desta viga.

R: 2,7