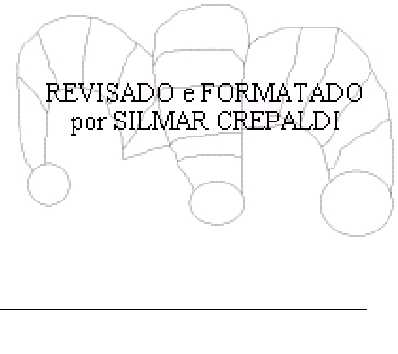
APOSTILA DE CÁLCULO I



Limites

Diz-se que uma variável **x** tende a um número real **a** se a diferença em módulo de **x-a** tende a zero. $(x \neq a)$. Escreve-se: $x \to a$ (**x** tende a **a**).

Exemplo : Se $x = \dfrac{1}{N}$, $N = 1,2,3,4,\ldots$ quando **N** aumenta, **x** diminui, tendendo a zero.

Definição:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ é igual a **L** se e somente se, dado $x \to a$ e $\varepsilon \rangle 0$, existe $\delta \rangle 0$ tal que se

$0 \langle \; |x - a| \; \langle \; \varepsilon$ então $|f(x) - L| \langle \; \delta$.

Propriedades:

1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$ $(C = \text{constante})$

2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$

4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$

5. $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

6. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

7. $\lim_{x \to a} C^{f(x)} = C^{\lim_{x \to a} f(x)}$, $C = \text{Constante}$

8. $\lim_{x \to a} \log_b f(x) = \log_b \lim_{x \to a} f(x)$

9. $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$ onde $P(x)$ é uma função polinomial

10. Quando $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \to a$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$, então $\lim_{x \to a} h(x) = L$

Exemplos:

1) $\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 3.2 + 4 = 10$

2) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{2^2 - 4}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{(x+2)} - \sqrt{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{0+2} - \sqrt{2}}{0} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{0} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{(x+2)} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left(\sqrt{(x+2)} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{(x+2)} + \sqrt{2}\right)}{x.\left(\sqrt{(x+2)} + \sqrt{2}\right)} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - 2}{x.\left(\sqrt{(x+2)} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{(x+2)} + \sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Exercícios **:**

1) Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4}{x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8-2x+x^2}{1-x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{(4-x)}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{y^3+8}{y+2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{2x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-x-6}$

h) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2}}{x-5}$

i) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-2x^2}{-x+3}$

j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{7-x^3-x}{4-x}$

l) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$

m) $\lim\limits_{x\to 3} \left(3x^2-7x+2\right)$

n) $\lim\limits_{x\to -1} \left[(x+4)^3.(x+2)^{-1}\right]$

o) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{t^2+5t+6}{t+2}$

p) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{t^2-5t+6}{t-2}$

Limites Laterais

Suponha que, quando **x** tende a **a** pela **esquerda,** isto é, por valores menores que **a**, f (x) tende ao número L_1. Este fato é indicado por:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

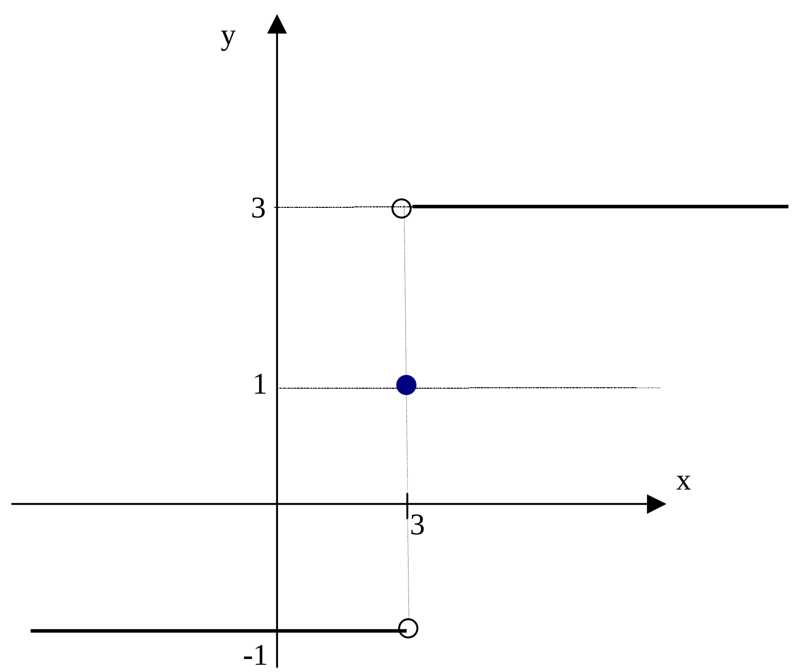
Suponha que, quando **x** tende a **a** pela **direita,** isto é, por valores maiores que **a**, f (x) tende ao número L_2. Este fato é indicado por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

Os números L_1 e L_2 são chamados, respectivamente, de limite à esquerda de **f** em **a** e limite à direita de **f** em **a** e referidos como **limites laterais** de **f** em **a** .

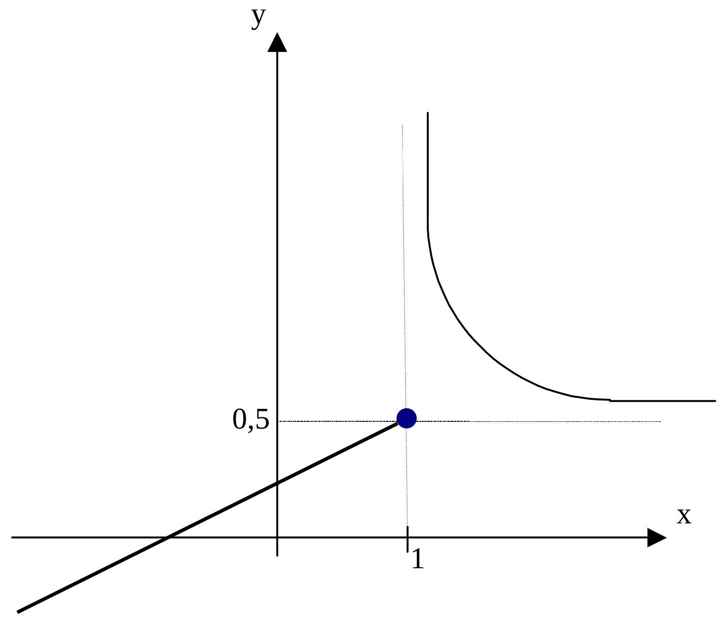
Exercícios **:**

1) Seja a função definida pelo gráfico abaixo. Intuitivamente, encontre se existir:



a) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ d) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ f) $\lim_{x 4 \infty} f(x)$

2) Seja a função definida pelo gráfico abaixo. Intuitivamente, encontre se existir:



a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

3) Dada a função $f(x) = 1 + \sqrt{x-3}$, determinar, se possível, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

4) Seja f(x) = $\begin{cases} x^2+1 & \text{para} \quad x\langle 2 \\ 2 & \text{para} \quad x=2 \\ 9-x^2 & \text{para} \quad x\rangle 2 \end{cases}$. Determinar: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

5) Seja f(x) = $\begin{cases} x-1 & \text{para} \quad x \le 3 \\ 3x-7 & \text{para} \quad x\rangle 3 \end{cases}$.. Determinar $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

Limites Infinitos

Ao investigarmos $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ pode ocorrer que , ao tender x para a, o valor f (x) da função ou aumente sem limite, ou decresça sem limites.

Por exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Quando x se aproxima de 2 pela direita, f (x) aumenta sem limite:

x	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001
f (x)	10	100	1.000	10.000	100.000

Quando x se aproxima de 2 pela esquerda, f (x) diminui sem limite:

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999
f (x)	-10	-100	-1.000	-10.000	-100.000

Assim : $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = \infty$ e $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$.

São consideradas indeterminações: $\frac{0}{0}$ $\quad 0.(\pm\infty)$ $\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\quad (\pm\infty) \pm (\pm\infty)$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminado

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x^3+x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ indeterminado

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x+3}{x^3}}{\dfrac{x^3+x}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Exercícios:

1) Seja $f(x) = \dfrac{5+3x}{2x+1}$. Determinar:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-} f(x)$

2) Calcular:

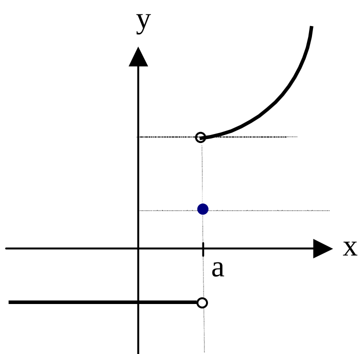
a) $\lim\limits_{x\to(2)^+} \left(1+\sqrt{x-2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to(5)^+} \dfrac{\left(1+\sqrt{2x-10}\right)}{x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to(4)^-} \dfrac{1}{(x-4)^3}$

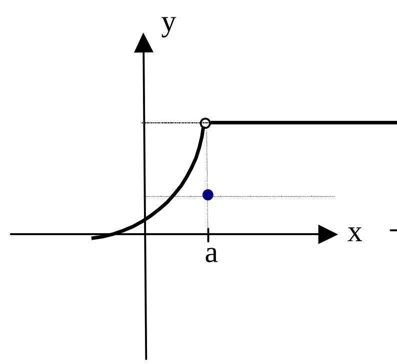
d) $\lim\limits_{x\to(4)^+} \dfrac{1}{(x-4)^3}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-5}{3x^2+x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x^2-+3x+1}{x^2+x-6}$

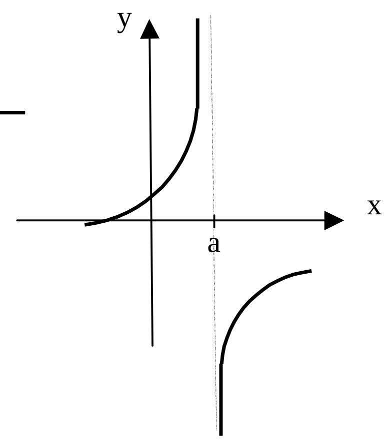
g) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2-+3x+1}{x^2+x-6}$

Continuidade

O conceito de continuidade está baseado na parte analítica, no estudo de limite, e na parte geométrica na interrupção no gráfico da função. Assim, as funções f(x), abaixo, são todas descontínuas:







$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$

$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Definição: Uma função é contínua em um ponto A se:

a) $f\,(a)$ é definida

b) $\lim_{x \to a} f\,(x)$ existe

c) $\lim_{x \to a} f\,(x) = f\,(a)$

A descontinuidade no gráficos (2) é chamada po<u>r ponto</u> ou <u>removível</u>, a descontinuidade em (1) é <u>por salto</u> e em (3) é uma descontinuidade <u>infinita</u>.

Exemplos:

Estudar analiticamente a descontinuidade das funções:

a) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x \langle 1 \\ 1 & x=1 \\ 1-|x| & x \rangle 1 \end{cases}$ em x =1.

f(1) = 1 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x^2=0$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1-|x|=\lim\limits_{x\to 1^+} 1-x=0$

f é descontínua por ponto ou removível em x = 1. Para remover a descontinuidade basta fazer f(x)=0 para x = 1.

b) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & x \langle 2 \\ 4 & x=2 \\ 3x^2-8 & x \rangle 2 \end{cases}$ no ponto x=2.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-2=4=L1$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 3x^2-8=4=L2$

como L1 = L2 =f(2) então a função é contínua.

Exercícios:

Estudar analiticamente a descontinuidade das funções::

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{2x^2-3x-9} & x \langle 3 \\ 2 & x=3 \\ \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} & x \rangle 3 \end{cases}$ em x =3.

b) $$f(x) = \begin{cases} 7 & x = 2 \\ \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} & x \neq 2 \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\ x}{x} & x \langle 0 \\ 3 & x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & x \rangle 0 \end{cases}$$

3) Determinar o(s) valor(es) de A para o(s) qual(is) existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ **:**

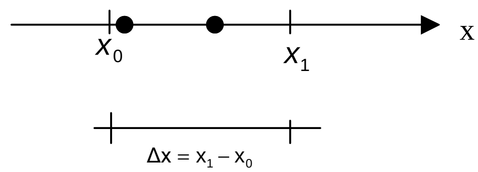
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 1 & x \geq 1 \\ (x - A)^2 & x \langle 1 \end{cases}$$

Derivada de uma Função

Acréscimo da variável independente

Dados x_0 e x_1 denominam incremento da variável x, à diferença:

$\Delta x = x_1 - x_0$



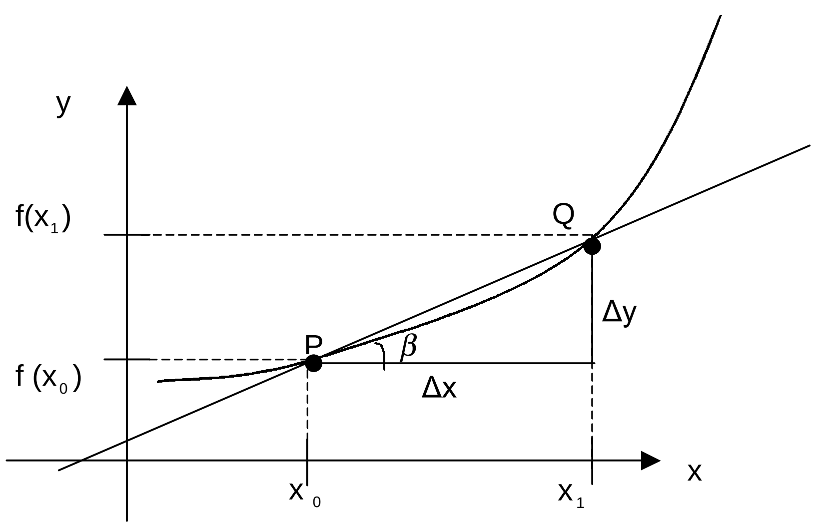
Acréscimo de uma função

Seja y = f(x) contínua. Dados x_0 e x_1 podem-se obter $f(x_0)$ e $f(x_1)$. À diferença $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ chama-se acréscimo ou variação da função f(x).

Como

$x_1 = x_0 + \Delta x$, então: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Graficamente: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\, \beta$



Razão Incremental

O quociente da variação da função Δy pelo incremento da variável independente Δx é chamado razão incremental.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Trocando x_0 por x (fixo momentaneamente), temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observe que a razão incremental é o coeficiente angular ($tg\beta$) da reta secante s, que passa por P e Q.

Derivada de uma função num ponto x:

eja y = f(x) contínua. Calculamos a razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. O limite da razão incremental para o acréscimo Δx tendendo a zero é definido como a derivada da função f(x). Ela pode ser indicada como:

$y' = f'(x)$ Lagrange

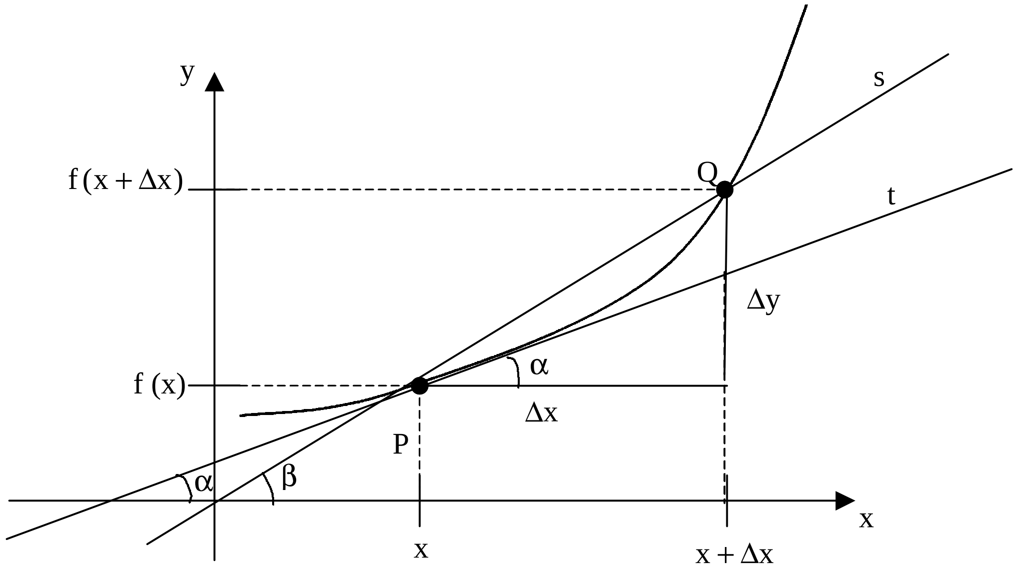
Dy = Df(x) Cauchy

$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$ Leibnitz

$\dot{y}$ Newton

Então:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \mathbf{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$



Quando $\Delta x \to 0$, a reta secante s tende para a reta tangente t , $\text{tg}\,\beta \to \text{tg}\,\alpha$ e $f'(x) = \text{tg}\,\alpha$.

Geometricamente $f'(x)$ mede a inclinação da reta tangente à curva y = f(x) no ponto P(x, f(x)).

Exemplo:

Sendo C uma constante e f(x) = C , calcular pela definição $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = C$$

$$f(x+\Delta x) = C$$

$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Então se $f(x) = C \rightarrow f'(x) = 0$.

Propriedades

1. **Propriedade** $\mathbf{f(x) = C \rightarrow f'(x) = 0}$.

2. **Propriedade** $\mathbf{f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}}$

Exemplos:

a) $f(x) = x^7 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 7x^6$

b) $f(x) = \sqrt{x} \quad \therefore \quad f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercícios: Calcular a derivada das funções:

a) $f(x) = 4x^3$

b) $f(x) = 7x^9$

c) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

3. **Propriedade** $\mathbf{(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$

4. **Propriedade** $\mathbf{(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)}$

Exemplos:

a) $f(x) = 2x^4 + 3x^7$

$f\,'(x) = 8x^3 + 21x^6$

b) $f(x) = 3x^9 - 10x^4$

$f\,'(x) = 27x^8 - 40x^3$

c) $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{2}{5}}$

$f\,'(x) = 3.\dfrac{1}{3}x^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} - 4.\dfrac{2}{5}x^{\left(\frac{2}{5}-1\right)} = \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{8}{5x^{\frac{3}{5}}}$

5. **Propriedade** $\mathbf{(f.g)\,'(x) = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)}$

Exemplos:

a) $F(x) = x^3.(x^2 + 1)$

$f\,(x) = x^3 \quad \to f'\,(x) = 3x^2$

$g(x) = x^2 + 1 \;\to\; g'\,(x) = 2x$

$F'\,(x) = 3x^2.\,(x^2 + 1) + x^3.\,2x$

$F'\,(x) = 5x^4 + 3x^2$

b) $F(x) = (x^3 + 2x).(x^{\frac{2}{3}} + 2x^2)$

$f(x) = (x^3 + 2x) \quad \to \quad f\,'(x) = 3x^2 + 2$

$g(x) = (x^{\frac{2}{3}} + 2x^2) \quad \to \quad g\,'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 4x$

$$F'(x) = (3x^2 + 2).(x^{\frac{2}{3}} + 2x^2) + (x^3 + 2x).(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 4x)$$

$$F'(x) = \frac{11}{3}x^{\frac{8}{3}} + 10x^4 + \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + 12x^2$$

c) $F(x) = (x^2 + 4)(2 + x^9)$

$$f(x) = x^2 + 4 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

$$g(x) = 2 + x^9 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 9x^8$$

$$F'(x) = 2x.(2 + x^9) + (x^2 + 4).(9x^8)$$

$$F'(x) = 11x^{10} + 36x^8 + 4x$$

6. **Propriedade** $\left(\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}\right)' = \frac{\mathbf{f'(x)\,.\,g(x) - f(x)\,.\,g'(x)}}{\mathbf{(g(x))^2}}$

Exemplos:

a) $y = \dfrac{1 - x}{x^2}$

$$f(x) = 1 - x \quad \rightarrow \quad f'(x) = -1$$

$$g(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 2x$$

$$y' = \frac{(-1).(x^2) - (1 - x).(2x)}{(x^2)^2} = \frac{-x^2 - 2x + x^2}{x^4} = \frac{x^2 - 2x}{x^4}$$

$$y' = \frac{x - 2}{x^3}$$

b) $y = \dfrac{x+3}{1-x^2}$

$$f(x) = x + 3 \quad \to \quad f'(x) = 1$$

$$g(x) = 1 - x^2 \quad \to \quad g'(x) = -2x$$

$$y' = \frac{1.(1 - x^2) - (x+3).(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 + 6x + 1}{(1-x^2)^2}$$

a) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7}$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \to \quad f'(x) = 2x - 5$$

$$g(x) = x^2 - 7 \quad \to \quad g'(x) = 2x$$

$$y' = \frac{(2x-5).(x^2-7) - (x^2 - 5x + 6).(2x)}{(x^2-7)^2}$$

$$y' = \frac{5x^2 - 26x + 35}{(x^2-7)^2}$$

Exercícios:

Calcular as derivadas das funções:

1) $y = (1 - t^2)\, t^4$

2) $y = (z^3 - 2z^2 + 1)(z - 5)$

3) $y = (x^3 - 2x)(x^{\frac{2}{3}} + 2x^2)$

3) $y = \dfrac{x^{\frac{3}{2}} - 2}{\sqrt{x}}$

4) $y = (x^2 + 3)(3x - 1)$

5) $y = \dfrac{8 - z + 3z^2}{2 - 9z}$

6) $y = \dfrac{\frac{3}{5}t - 1}{\frac{2}{t^2} + 7}$

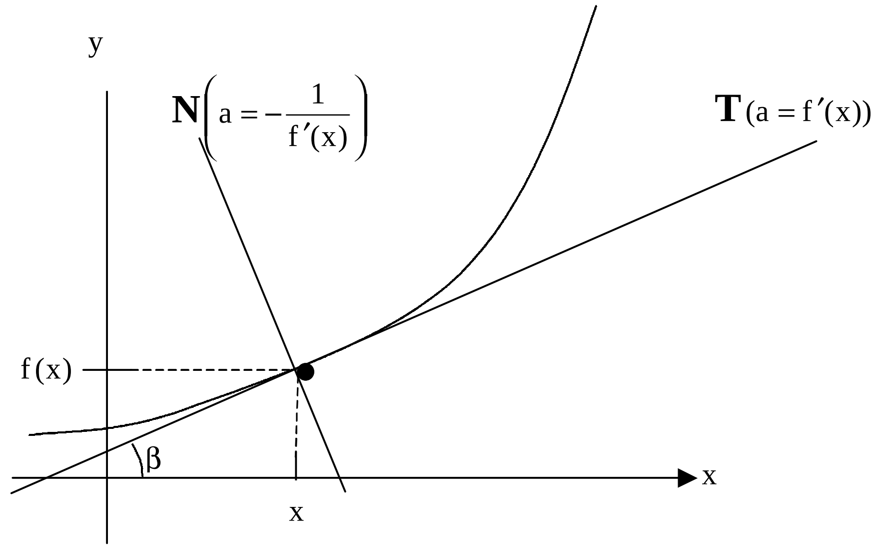
7) $y = \dfrac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$

8) $y = \dfrac{\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right)}{\left(\frac{3}{4}x^2 + 5x\right)}$

9) $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

10) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

Significado Geométrico da Derivada



$f'(x) =$ inclinação da tangente T no ponto P(x, f(x))

N = reta normal ao gráfico de y = f(x) no ponto P(x,f(x))

Exemplo:

Obter as equações das retas normal e tangente ao gráfico da função $y = f(x) = 4 - x^2$ nos pontos $P_1(2,0)$ e $P_2(-1,3)$.

No ponto (2,0) $\quad f'(x) = 2 \quad \therefore \quad a = 2 \quad a_n = -\frac{1}{2}$

Equação de T $\quad y = 2(x - 2)$

$y = 2x - 2$

equação de N $\quad y = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$

No ponto (-1,3): $\quad f'(x) = 2 \quad \therefore \quad a = 2$

Equação de T $\quad y - 3 = 2(x + 1)$

$$y = 2x + 5$$

equação de N $\quad y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 1)$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Exercícios:

1) Dada a função $y = x^2 - 2\sqrt{x}$ e o ponto P(4,12), determine a equação das retas normal e tangente ao gráfico da função no ponto P.

2) Achar a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa dada:

a) $f(x) = 2x^2 - 5$, $x = 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 2$

3) Achar os pontos onde a reta tangente ao gráfico da função dada é paralela ao eixo x:

a) $y = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 4x$

b) $y = x^3 + 10$

c) $y = x^4 + 4x$

4) Achar a equação da reta normal ao gráfico da função no ponto de abcissa dada:

a) $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $x = -1$

b) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$

5) Determinar as abcissas dos pontos do gráfico $y = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ nos quais a tangente é:

a) paralela à reta 3 y – 9 x – 4 = 0

b) perpendicular à reta 7 y = -x + 21

Derivadas de Ordem Superior

$y = f(x)$

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'$ derivada primeira

$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$ derivada segunda

$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$ derivada terceira

De um modo geral

$f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = y^n$

Exemplos: Calcular y', y'' e y''' ::

a) $y = x^8 - 4x^4 + 2x$

$y' = 8x^7 - 16x^3 + 2$

$y'' = 56x^6 - 48x^2$

$$y''' = 336x^5 - 96x$$

b) $y = 4x^2 - 2x + 40x^3 - \sqrt{x}$

$$y' = 8x - 2 + 120x^2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = 8 + 240x \ + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$y''' = 240 - \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

Exercícios**:** Calcular y', y'' e y''' :

1) $y = 4x^7 - 5x^5 + 3x^{\frac{1}{6}} - 11$

2) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

3) $y = x^8 + x^{-\frac{1}{2}} + 15x^{-1}$

4) $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$

5) $y = (x^2 + 3)(x - 1)$

Regra da Cadeia

Se y = f(x) e u = g(x) e as derivadas dy/du e du/dx existem, ambas, então a função composta definida por y = f(g(x)) tem derivada dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f^{'}(u) . g^{'}(x)$$

Para derivar $y = (x^2 + 1)^2$ podemos expandir a função e depois derivar, ou seja:

$$y = f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$$

Se quisermos derivar a função $y = (x^2 + 1)^{100}$ só conseguiremos resolver através da regra da cadeia.

Assim:

$$u = x^2 + 1$$

$$y = u^{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{du} = 100u^{99}$$

$$u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 100(x^2 + 1)^{99} .2x = 200\,x\,(x^2 + 1)^{99}$$

Nesse caso a ***propriedade*** é:

$$\boldsymbol{y = u^n \qquad \Rightarrow \qquad y^{'} = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u^{'}}$$

Exemplos:

1) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4} \quad = \left(x^2 + 2x + 4\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 4\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+2) = \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

2) $y = \left(8x + x^4 - 10\right)^{20}$

$$y' = 20\left(8x + x^4 - 10\right)^{19}\left(8 + 4x^3\right) = 80\left(8x + x^4 - 10\right)^{19}\left(2 + x^3\right)$$

***Exercícios*:** Calcular y' para a s funções:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4 - x + 1}}$

2) $y = \dfrac{x^2 + 3}{\sqrt[3]{x - 2}}$

3) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}}$

4) $y = \left(x^2 - 4x + 2\right)^8$

5) $y = \sqrt[3]{x^4 - 2x + 1}$

6) $y = (3x+1)^6 . \sqrt{2x - 5}$

7) $y = (8x - 7)^{-5}$

8) $y = \left(w^4 - 8w^2 + 15\right)^4$

9) $y = \left(6x - 7\right)^3 . \left(8x^2 + 9\right)^2$

10) $y = \sqrt[3]{8r^3 + 27}$

11) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3s - 4}}$

12) $y = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 9}}$

13) $y = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^4} + \dfrac{3}{x^5}$

14) $y = \dfrac{1}{\left(x^2 + 3x + 5\right)^2}$

15) $y = \left(4x^2 - 3\right)\left(\sqrt{2x + 1}\right)$

16) $y = \dfrac{\sqrt{5x - 1}}{\left(3x + 4\right)^3}$

Derivada das Funções Trigonométricas

Derivada da função **seno**

$$Se \;\; y = f(x) = sen\, x \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{dy}{dx} = \cos x$$

Pela Regra da Cadeia: ***Se*** $\boldsymbol{y = sen\, u \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{dy}{dx} = u' \cos u}$

Derivada da função **cosseno**

$$y = f(x) = \cos x$$

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x \quad \rightarrow \quad \cos x = \left(1 - \mathrm{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \cos x = \left(1 - sen^2 x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(1 - sen^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2senx.\cos x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2senx.\cos x\right) = -senx$$

$$\therefore\ Se\ \ y = f(x) = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{dy}{dx} = -sen\ x$$

Pela Regra da Cadeia: ***Se*** $\boldsymbol{y = \cos u \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{dy}{dx} = -u' \mathrm{sen}\, u}$

Exemplos:

Calcular as derivadas de:

1) $y = \mathrm{sen}\left(x^2 + 1\right)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos\left(x^2 + 1\right).2x$$

$$y' = 2x\cos\left(x^2 + 1\right)$$

2) $y = \text{sen}\sqrt{x}$

$$y = \cos\sqrt{x}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$$

3) $y = (x^2+1)^{20}\,sen(x^3+2)$

$$f = (x^2+1)^{20} \quad \Rightarrow \quad f' = 20(x^2+1)^{19}.2x$$

$$g = \text{sen}(x^3+2) \quad \Rightarrow \quad g' = 3x^2.\cos(x^3+2)$$

$$y' = 40x(x^2+1)^{19}\,\text{sen}(x^3+2) + 3x^2(x^2+1)^{20}\cos(x^3+2)$$

4) $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$

$$f = \cos x \quad \Rightarrow \quad f' = -senx$$

$$g = x^2 \quad \Rightarrow \quad g' = 2x$$

$$y' = \frac{-x^2 sen\,x - 2x\cos x}{x^4} = \frac{-x\,sen\,x - 2\cos x}{x3}$$

Derivada da função **tangente**

$$Se\ \ y = f(x) = tg\ x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x}$$

$$f = sen\ x \quad \Rightarrow \quad f' = \cos x$$

$$g = \cos x \quad \Rightarrow \quad g' = -sen\ x$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Pela Regra da Cadeia: $\boldsymbol{Se \ \ y = tg\, u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = u' \sec^2 u}$

Derivada da função **cotangente**

$$Se \ \ y = f(x) = \cot g\, x \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{\cos x}{\text{sen x}}$$

$$f = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad f' = -sen\, x$$

$$g = sen\, x \qquad \Rightarrow \qquad g' = \cos x$$

$$y' = \frac{-sen^2 x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1}{sen^2 x} = -\cos\sec^2 x$$

Pela Regra da Cadeia: $\boldsymbol{Se \ \ y = \cot g\, u \ \Rightarrow \ y' = \frac{dy}{dx} = -u' \cos\sec^2 u}$

Derivada da função **secante**

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} = \cos^{-1} x$$

$$y' = -1\cos^{-2} x(-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x.\text{tgx}$$

Pela Regra da Cadeia**:** **Se** $\boldsymbol{y = \sec u \quad \Rightarrow \quad y' = \sec u \,.\, tg u \,.\, u'}$

Derivada da função **cossecante**

$$y = \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen}^{-1} x$$

$$y' = (-1)\operatorname{sen}^{-2} x \ (\cos x) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cossec} x . \operatorname{cotg} x$$

Pela Regra da Cadeia: **Se** $\boldsymbol{y = \operatorname{cossec} u \Rightarrow y' = -\operatorname{cossec} u \,.\, \operatorname{cotg} . u'}$

***Exemplos*:** Calcular as derivadas de:

1) $y = tg\left(x^2 + 2x + 1\right)$

$$y' = [2x + 2]\sec^2\left(x^2 + 2x + 1\right)$$

2) $y = \dfrac{tgx}{\operatorname{cossec} x}$

$$f = tg\ x \qquad \Rightarrow \qquad f' = \sec^2 x$$

$$g = \operatorname{cossec} x \qquad \Rightarrow \qquad g^1 = -\operatorname{cossec} x . \cot g\ x$$

$$y' = \frac{\sec^2 x . \operatorname{cossec} x + \operatorname{cossec} x . tgx . \cot gx}{\operatorname{cossec}^2 x} = \frac{\sec^2 x + 1}{\operatorname{cossec} x}$$

Exercícios:

1) $y = \cot g\left(x^3 + 3\right)\sec\left(\sqrt{x} + 1\right)$

2) $y = x^2.\cos\sec(5x)$

3) $y = \cot g^3\left(3x^5 + 1\right)$

4) $y = \operatorname{sen}(8x + 3)$

5) $y = tg\sqrt[3]{5 - 6x}$

6) $y = \cos\left(3x^5 - 5x^3\right)$

7) $y = tg\left(\sqrt[8]{x} - \sqrt[5]{x}\right)$

8) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

9) $y = \dfrac{\sec 2x}{tg2x - 1}$

10) $y = \sec x.tg(x^2 + 1)$

11) $y = \dfrac{1}{\cos x \,.\, \cot g\, x}$

12) $y = \dfrac{1 + \sec x}{tg(3x - 1) + \operatorname{sen}^2 x}$

13) $y = 2\,x\cot g\,x + x^2\ tg\,x$

14) $y = \operatorname{sen}(-x) + \cos(-x)$

15) $y = (\operatorname{sen}(4x) + \cos(2x))^2$

16) $y = \dfrac{x + \cos 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

17) $y = \left(x^2 - 1\right)tg\,x - x\ \operatorname{sen} 2x$

18) $y = tg\,(-2x)\left(x^2 - 2x + 1\right)$

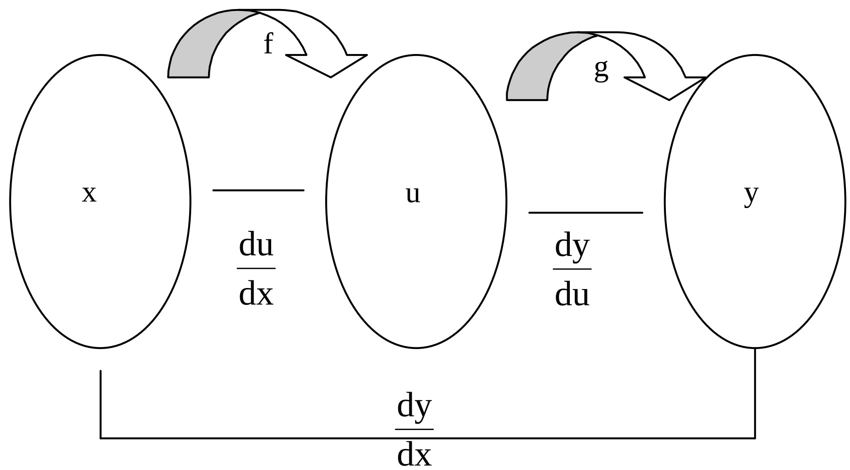
19) $y = \cos\sec 5x\,.\,tg\sqrt{x}$

20) $y = \cos^2\left(x^2 - 2x + 1\right)$

21) $(\operatorname{sen} x + \cos 3x)^3$

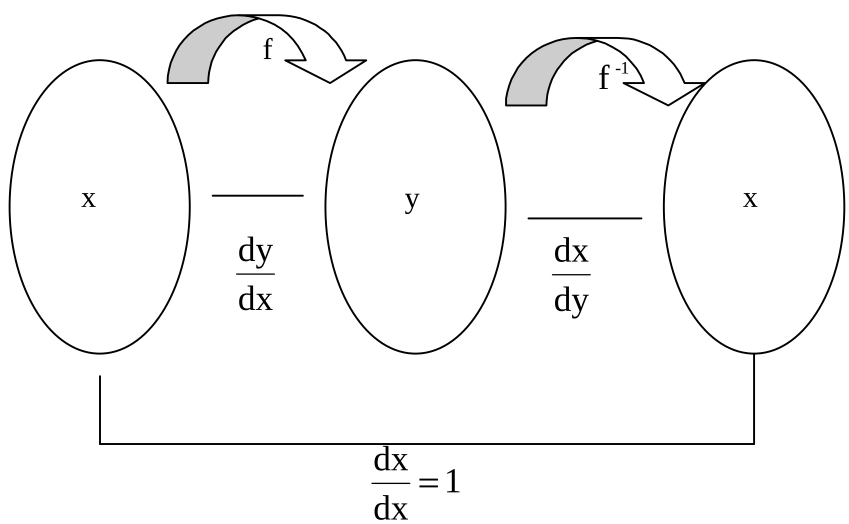
Derivada da Função Inversa

Vimos a regra da cadeia para a composição de duas funções f (x) e g(x):



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Para a função inversa $g = f^{-1}$



Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Derivada da Função Exponencial

Se $y = a^x \quad \Rightarrow \quad y' = a^x \ln a$

Pela Regra da Cadeia**:** $\quad$ **Se** $\boldsymbol{y = a^u} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y' = u'.a^u \ln a}$

Exemplos: Derivar:

1) $y = 2^x \quad \Rightarrow \quad y' = 2^x \ln 2$

2) $y = 2^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = 2^{x^2} \ln 2.\, 2x = 2x.2^{x^2}.\ln 2$

Para $a = e \cong 2{,}71828$

$y = e^x \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y' = e^x}$

Pela Regra da Cadeia: $\quad$ **Se** $\boldsymbol{y = e^u} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y' = e^u u'}$

Exemplos: Derivar

1) $y = e^{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{x^2+1}.(2x)$

2) $y = e^{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\sqrt{x}} . \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $y = e^{\text{sen}\,x} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\text{sen}\,x} . \cos x$

4) $y = e^{\frac{x^2+1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\frac{x^2+1}{x}} . \left(\dfrac{2x.x - 1.(x^2+1)}{x^2} \right) = e^{\frac{x^2+1}{x}} . \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2} \right)$

Derivada da Função Logaritmo

$y = \log_a x \quad \Rightarrow \quad a^y = x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dy} = a^y . \ln a = x . \ln a$

Como: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x . \ln a}$

Se $y = \log_z x \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Pela Regra da Cadeia: **Se** $\boldsymbol{y = \log_a u} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y' = \dfrac{u'}{u \ln a}}$

Para a=e $\quad \Rightarrow \quad \log_a x = \ln x$

Pela Regra da Cadeia: **Se y = ln u** $\quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y' = \dfrac{u'}{u}}$

***Exemplos*: ** Derivar

1) $y = \ln x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y' = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

2) $y = \ln \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}$

3) $\log_3 \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\ln 3} = \dfrac{1}{2\ln 3}$

Lembrar que :

ln (p . q) = ln p + ln q

$\ln \dfrac{p}{q} = \ln p - \ln q$

$\ln p^r = r \cdot \ln p$

***Exercícios*:** Derivar

1) $y = \ln\left[\sqrt{6x - 1}.(4x+5)^3\right]$

2) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$

3) $y = \ln \dfrac{x^2(2x-1)^3}{(x+5)^2}$

4) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

5) $y = e^{-2x}.\text{tg}(4x)$

Derivadas de Funções na Forma Implícita

Considere a expressão:

$$x^2 + y^2 = 49$$

Podemos isolar y em função de x:

$$y^2 = 49 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{49 - x^2}$$

Ficam definidas duas funções:

$$y = f\,(x) = \sqrt{49 - x^2} \qquad e \qquad y = f\,(x) = -\sqrt{49 - x^2}$$

Diz-se que $y = f\,(x) = \sqrt{49 - x^2}$ e $y = f\,(x) = -\sqrt{49 - x^2}$ são funções na forma explícita (y em função de x) , enquanto $x^2 + y^2 = 49$ é uma função na forma implícita.

Seja $x^2 + y^2 = 49$. Usando a Regra da Cadeia :

$\left(u^n\right)' = n.\,u^{n-1}u'$, a derivada de y^2 com relação a x é $2.y.\,y'$.

Na equação inicial se derivarmos todos os termos com relação a x, temos:

$$2\;x + 2\,y\,y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Exemplos: Calcular y' para as funções abaixo:

1) $x^3 + 3y^4 = 0$

$$3x^2 + 12\,y^3\,y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{-3\,x^2}{12\,y^3} = \frac{-x^2}{4y^3}$$

2) $x^2y + y^4 = 4$

$$f = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad f' = 2x$$

$$g = y \qquad \Rightarrow \qquad g' = y'$$

$$2\,x\,y + x^2\,y' + 4\,y^3\,y' = 0$$

$$y' = \frac{-2\,x\,y}{x^2 + 4\,y^3}$$

3) $\text{sen}^4\,x + x\cos y = e^x$

$$4\,\text{sen}^3 x\cos x + \cos y + x\,(-\text{sen}\,y)\,y' = e^x$$

$$y' = \frac{-e^x + 4\,\text{sen}^3 x\cos x + \cos y}{x\,\text{sen}\,y}$$

4) Encontrar as equações das retas tangente e normal ao gráfico da curva

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ no ponto } \left(1, \frac{\sqrt{27}}{2}\right).$$

Derivando com relação a x , temos:

$$\frac{1}{4}.\,2x + \frac{1}{9}.\,2y.\,y' = 0$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{9}y\,.y' = 0$$

$$y' = \frac{\frac{-x}{2}}{\frac{2}{9}y}$$

No ponto $\left(1, \frac{\sqrt{27}}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $a = y'\big|_P = \frac{-9}{2\sqrt{27}}$ $a_N = \frac{2\sqrt{27}}{9}$

Reta Tangente T $\Rightarrow$ $y - \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{-9}{2\sqrt{27}}(x-1)$

Reta Normal N $\Rightarrow$ $y - \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{2\sqrt{27}}{9}(x-1)$

Exercícios:

1) Calcular y' para:

a) $3x^2 + 5x^4 - xy = 4$ b) $\operatorname{sen} y + x^2y^3 = \operatorname{tg} x$ c) $y = x^2 \operatorname{sen} y$

2) Encontrar as equações das retas tangente e normal ao gráfico da curva $y^4 + 3y - 4x^3 = -5x + 1$ no ponto $(1, 0)$.

Diferenciais de uma Função

Dada uma função y= f (x), define-se diferencial de y = f(x) como:

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

onde Δx é o acréscimo da variável independente x e dy é o diferencial de y.

Define-se então a diferencial da variável dependente como :

$$dy = f'(x)\,dx$$

Lembrando o significado geométrico da derivada, temos:

$\Delta y = f\,(x + \Delta x)\_ - f\,(x)$

$\therefore f\,(x + \Delta x) - f\,(x) \cong f'(x)\,\Delta x$

$f\,(x + \Delta x) \cong f\,(x) + f'(x)\,\Delta x$

Exemplos:

1) Obter um valor aproximado para $\sqrt{37}$.

escolhendo $f\,(x) = \sqrt{x}$

$x = 36$

$\Delta x = 1$

$x + \Delta x = 37$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$\sqrt{37} = \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}}.1$$

$$\sqrt{37} \cong 6 + \frac{1}{12} \cong 6{,}08333$$

2) Obter um valor aproximado para $\text{sen}\,31^0$

$$f(x) = \text{sen}\,x$$

$$x = 30^0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\Delta x = 1^0 = \frac{\pi}{180}$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$\text{sen}\,31^0 = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}.\frac{\pi}{180}$$

$$\text{sen}\,31^0 \cong 0{,}51511$$

Exercícios:

1) Obter um valor aproximado para

a) $\sqrt[3]{63}$ b) $(3{,}1)^4$ c) $\sqrt[4]{15}$ d) $(2{,}03)^3$ e) $\cos 44^0$

2) Calcular os diferenciais de:

a) $y = \left(x^3 - 5x^2 + 2\right)^4$

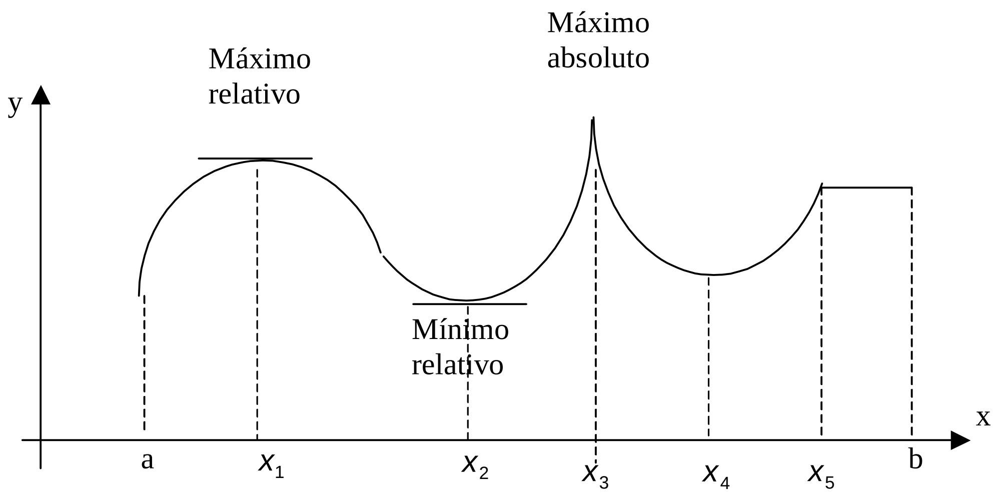
b) $y = \text{sen}\left(3x^2\right)$

c) $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{\sqrt{x}}$

Aplicações da Derivada

Máximos e Mínimos de uma Função

Considere a função cujo gráfico é:

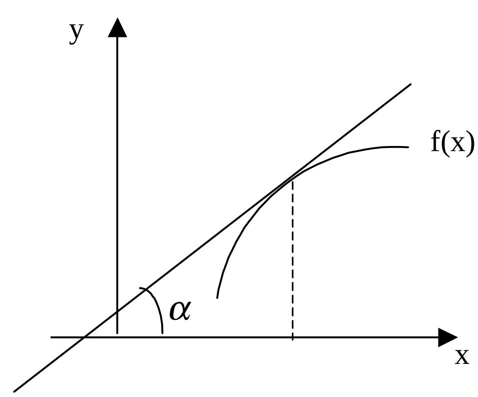


f(x) é crescente nos intervalos $(a,x_1),(x_2.x_3),(x_4.x_5)$

f(x) é decrescente nos intervalos $(x_1.x_2),(x_3.x_4)$

f(x) é constante no intervalo (x_5,b)

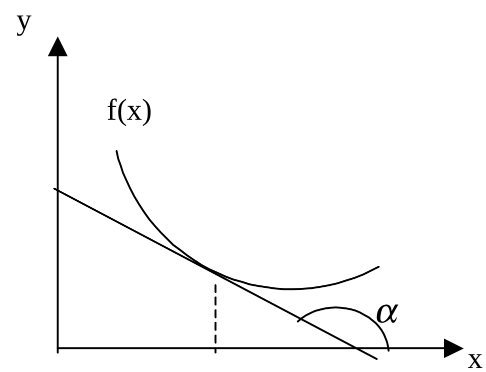
Seja um trecho de f(x) crescente:



$$f^{'}(x) = tg\ \alpha$$

se f (x) é crescente, temos $0 \langle \alpha \langle \frac{\pi}{2}$

$\therefore tg\alpha \rangle 0$ e $f^{'}(x) \rangle 0$



Seja um trecho de f(x) decrescente:

$$f^{'}(x) = tg\ \alpha$$

se f (x) é decrescente, temos $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\therefore tg\alpha < 0$ e $f^{'}(x) < 0$

Se f(x) é constante, $f^{'}(x) = 0$.

Exemplos:

1) Determinar os intervalos em que a função $f(x) = 4 - x^2$ é crescente e onde é decrescente.

$$f(x) = 4 - x^2$$

$$f^{'}(x) = -2x \quad \begin{cases} -2x > 0 \quad \text{se} \quad x < 0 \quad \therefore \quad \text{f(x) é crescente para} \quad x < 0 \\ -2x < 0 \quad \text{se} \quad x > 0 \quad \therefore \quad \text{f(x) é decrescente para} \quad x > 0 \end{cases}$$

2) Determinar os intervalos em que a função $f(x) = x^2 + 5x + 4$ é crescente e onde é decrescente.

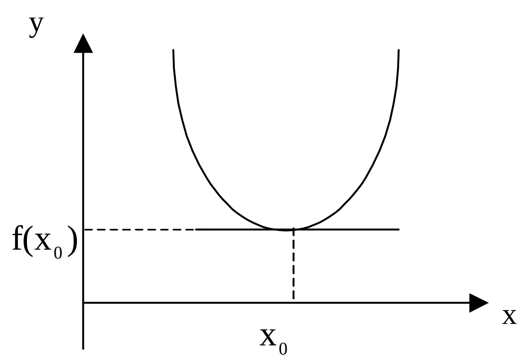
$$f(x) = x^2 + 5x + 4$$

$$f'(x) = 2x + 5 \quad \begin{cases} 2x+5 > 0 \quad \text{se} \quad x > -\dfrac{5}{2} \quad \therefore \quad \text{f(x) é crescente para} \quad x > -\dfrac{5}{2} \\ 2x+5 < 0 \quad \text{se} \quad x < -\dfrac{5}{2} \quad \therefore \quad \text{f(x) é decrescente para} \quad x < -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

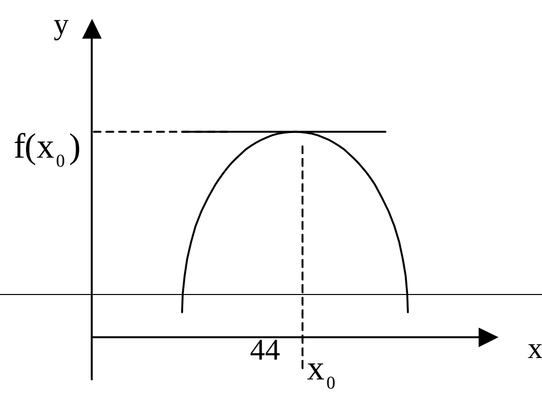
Máximos e Mínimos Relativos ou Locais

Seja f(x) definida no domínio D.

$x_0 \in D$ é ponto de mínimo local de f (x) se $f(x_0) \leq f(x)$ para x pertencente a qualquer intervalo aberto que o contenha.



$x_0 \in D$ é ponto de máximo local de f (x) se $f(x_0) \geq f(x)$ para x pertencente a qualquer intervalo aberto que o contenha.

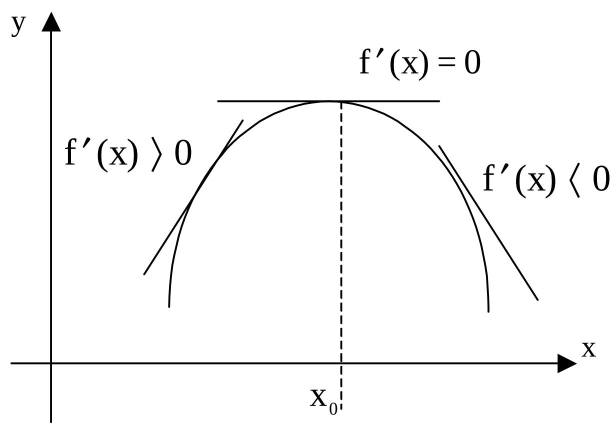


Resultado:

Se f (x) existe e é contínua , então num ponto de máximo ou mínimo local temos $f'(x_0) = 0$. Esse ponto é chamado **ponto crítico de** f(x).

Estudo do Sinal da Derivada Segunda

Para se caracterizar máximos e mínimos locais é necessário uma análise do sinal da derivada segunda da função f (x).



Observe que para $x < x_0$ temos $f'(x) > 0$ .Para $x = x_0$ temos $f'(x) = 0$ e para $x > x_0$ temos $f'(x) < 0$. Logo $f'(x)$ é decrescente e portanto sua derivada $f''(x) < 0$.

Conclusão:

Dada uma função f (x):

a) Calcular a derivada primeira $f'(x)$.

b) Obter os pontos críticos x_0 para os quais $f'(x) = 0$.

c) Calcular a derivada segunda:

Se $f''(x_0) < 0$ temos que x_0 é ponto de máximo relativo.

Se $f''(x_0) > 0$ temos que x_0 é ponto de mínimo relativo

Exemplos:

1) Determinar os pontos de máximos e mínimos locais da função $f(x) = 4 - x^2$

pontos críticos ($f'(x) = 0$)

$f'(x) = -2x \qquad -2x = 0 \qquad x_0 = 0$

$f''(x) = -2 \qquad \therefore\ x_0$ é ponto de máximo relativo

$f(x_0) = f(0) = 4$ é o valor máximo relativo de f (x).

2) Idem para $y = f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$ pontos críticos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$f''(x) = 12x - 24$

$f''(1) = -12 < 0 \quad \therefore \quad x_0 = 1$ é abcissa do ponto de máximo relativo

f (1) = 6 é o valor do máximo relativo

$f''(3) = 12 > 0 \quad \therefore \quad x_0 = 3$ é abcissa do ponto de mínimo relativo

f (3) = -2 é o valor do mínimo relativo

Estudo da Concavidade de uma Função

A concavidade de uma curva f (x) é identificada pelo sinal da derivada segunda.

Se $f''(x) > 0$ num intervalo do domínio D temos concavidade voltada para cima.
Se $f''(x) < 0$ num intervalo do domínio D temos concavidade voltada para baixo.

Um ponto do gráfico de y = f (x) onde há mudança no sinal da derivada segunda $f''(x)$ é chamado ponto de inflexão $f''(x) = 0$.

Exemplo:

Seja $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 2$. Determine:

a) o intervalo onde f(x) é crescente e onde é decrescente.

b) pontos de máximo e mínimo relativos.

c) Pontos de inflexão.

Solução:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Estudo do sinal:

1. linha : $x - 2$

2. linha : $x - 3$

3. linha : (x-2) (x-3)

2 3

-	+	+
-	-	+
+	-	+

$\therefore \quad f'(x) > 0$ para $x < 2$ ou $x > 3 \Rightarrow$ f crescente

$f'(x) < 0$ para $2 < x < 3 \Rightarrow$ f decrescente

b) pontos críticos

$$f'(x) = 0 \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f''(x) = 2x - 5 \quad \begin{cases} x = 2 \;\Rightarrow\; f''(x) < 0 \\ \\ \quad f(2) = \dfrac{20}{3} \;\;\therefore\;\; \text{ponto} \left(2, \dfrac{20}{3}\right) \text{ é de máximo relativo} \\ \\ x = 3 \;\Rightarrow\; f''(x) > 0 \\ \\ \quad f(3) = \dfrac{13}{2} \;\;\therefore\;\; \text{ponto} \left(3, \dfrac{13}{2}\right) \text{é de mínimo relativo} \end{cases}$$

c) inflexão

$f''(x) = 0 \qquad 2x - 5 \qquad x = \dfrac{5}{2}$

$$\overset{-}{\rule{6em}{0.4pt}}\Big|_{\frac{5}{2}}\overset{+}{\rule{6em}{0.4pt}}$$

$\therefore \quad f(x)$ passa de - para +

<u>Máximos e Mínimos Absolutos</u>

Se y = f (x) é contínua e definida num intervalo fechado [a,b], derivável em [a,b] então existem pontos x_0 e x_1 tais que:

1) $f(x_0) \geq f(x) \;,\; \forall x \in [a,b]$ e

2) $f(x_1) \leq f(x) \;,\; \forall x \in [a,b]$

x_0 = ponto de mínimo absoluto de f(x)

x_1 = ponto de máximo absoluto de f(x)

Para se obter os pontos de mínimo e máximo absoluto determina-se inicialmente os pontos de mínimo e máximo relativos. Compara-se esses valores com os da função no extremo do intervalo.

Exemplo:

Seja $y = f(x) = 16 - x^2$ no intervalo [-1, 4]

Pontos de máximo e mínimo relativos

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \in \; [-1, 4]$

$f''(x) = -2$ como $f''(x) \langle\; 0$ então $x = 0$ é ponto de máximo local e o valor máximo da função f (0)=16.

Calculando f (x) nos extremos f (-1)=15 e f (4) =0

Por comparação f (x) = 0 é ponto de máximo absoluto e x =4 é ponto de mínimo absoluto.

Exercícios:

1) Dada a função $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + 1$ verifique os intervalos para os quais a função é crescente e decrescente. Determine os pontos críticos, verificando se são de máximo ou mínimo. Determine o ponto de inflexão, se houver.
2) Idem para $y = f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x$
3) Determinar números positivos x e y,cujo produto seja igual a 12 e cuja soma seja a menor possível.
4) Determinar números positivos x e y,cuja soma seja igual a 12 e cujo produto seja o maior possível.
5) Encontre os pontos críticos, indicando se são máximos ou mínimos locais para $y = (x^2 - 1)^3$.

6) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo da produção é dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$ e o valor obtido na venda é dado por $V = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro L = V –C..
7) Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares de dimensões a e b, com um lado comum a. Se cada pasto deve medir 400 m^2 de área, determinar as dimensões a e b de forma que o comprimento da cerca seja mínimo.
8) Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado. Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pela figura seja mínima?